Wochenplan Quadratische Gleichungen und Wachstum

1. Lösen von Gleichungen! So kannst du vorgehen!

Aufgabenstellung: Gebe die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermittele die Lösungsmenge rechnerisch. $$\frac{x}{2x-2} - 0{,}25 = \frac{2}{4x-8}$$	
1. Definitionsmenge bestimmen $\frac{x}{2x-2} - 0{,}25 = \frac{2}{4x-8}$ 2x -2 = 0 2x = 2 x = 1 4x – 8 = 0 4x = 8 x = 2 x darf also weder 1 sein noch 2 D = R \ {1,2}	• Als erster ermittelt man die Definitionsmenge. • Im Nenner eines Bruches darf niemals Null stehen • Daher darf hier 2x – 2 nicht null sein! • 4x -8 darf auch nicht null sein! • Man bestimmt die Definitionsmenge und schließt die Zahlen aus, die x nicht sein darf.
2. Hauptnenner bestimmen $\frac{x}{2x-2} - 0{,}25 = \frac{2}{4x-8}$	• Den Hauptnenne bestimmt man mit dem Nenner. Hier also (2x -2) (4x – 8)
3. Mit dem Hauptnenner multiplizieren $\frac{x}{2x-2} - 0{,}25 = \frac{2}{4x-8}$ // · (2x -2) (4x – 8)	• Damit will man erreichen, dass die Brüche sich „wegkürzen“ lassen
$\frac{x(2x-2)(4x-8)}{2x-2} - 0{,}25(2x-2)(4x-8) = \frac{2(2x-2)(4x-8)}{4x-8}$	Jetzt kann man kürzen
x (4x – 8) – 0,25 (2x – 2) (4x – 8) = 2 (2x – 2)	Jetzt wird ausmultipliziert
$4x^2$ - 8x – 0,25 ($8x^2$ -16x – 8x + 16) = 4x - 4 $4x^2$ - 8x – $2x^2$ +4x + 2x – 4 = 4x - 4	Und die letzte Klammer noch auflösen
$4x^2$ - 8x – $2x^2$ +4x + 2x – 4 = 4x - 4 $2x^2$ - 2x -4 = 4x - 4 / -4x +4 $2x^2$ -6x = 0 / :2 0 = x^2 - 3x	Jetzt vereinfachen Alles auf eine Seite
0 = x^2 - 3x +$1{,}5^2$ - $1{,}5^2$ 0 = $(x - 1{,}5)^2$ - 2,25 / +2,25 2,25 = $(x - 1{,}5)^2$ / $\sqrt{\ }$ ±1,5 = x - 1,5 / + 1,5 X_1 = +1,5 + 1,5 x_2 = -1,5 + 1,5 X_1 = 0 x_2 = 3	Quadratische Ergänzung! Alternative Formel $X_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ Wurzel ziehen nach x auflösen
L = \ {0,3}	Lösungsmenge angeben.

2. Aufgaben und Erklärvideos aus den Abschlussprüfungen

Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch: $\frac{x-4}{6}+\frac{4(x-11)}{x-6}=\frac{16-x}{2}$	2017/1
7. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch. $\frac{10}{x+3}+\frac{9(x-4)}{x+1}=\frac{5x}{x+3}-6$	2017 /2
$\frac{2(x+2)}{x}=2-\frac{2-x}{x-2}$	2016/1
2. $D=\mathbb{R}\setminus\{6\}$ $(x-4)\cdot(x-6)+4\cdot(x-11)\cdot 6=(16-x)\cdot(x-6)\cdot 3$ $x^2-13x+12=0$ $x_1=1;\ x_2=12$ $L=\{1;12\}$	Lsg 2017/1
7. $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-1\}$ $10x+10+9x^2+27x-36x-108=5x^2+5x-6x^2-6x-18x-18$ $x^2+2x-8=0$ $x_1=-4;\quad x_2=2$ $L=\{-4;2\}$	LSG 2017/2
$D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ $2\cdot(x+2)\cdot(x-2)=2x\cdot(x-2)-x\cdot(2-x)$ $x^2-6x+8=0$ $x_1=2;\quad x_2=4$ $L=\{4\}$	2016/1

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-quadratische-gleichungen-loesen-2014-ag-i-nr-3-av:5e85c63b9a1cce001a8990b8

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-quadratische-gleichungen-loesen-2015-ag-i-nr-3-av:5ea6ba4229e99100130430da

3. Wichtige Begriffe: Basis – Exponenten - Potenzwert

Wir betrachten folgende Gleichung aus einer Potenz mit der **Basis 3**, mit **dem Exponenten 4** und **dem Potenzwert 81**.

$$3^4 = 81$$

Ersetzt man jeweils Potenzwert, Basis oder Exponenten mit der Variablen x, so erhält man verschiedene Problemstellungen:

- Der Potenzwert ist gesucht: $3^4 = x$

- Die Basis ist gesucht: $x^4 = 81$

  $x = +/- \sqrt[4]{81}$

- Der Exponent ist gesucht: $3^x = 81$

> Um den Exponenten zu berechnen, braucht man eine neue Rechenoperation: Den ***<u>Logarithmus.</u>***
> Mit dem ***<u>Logarithmus</u>*** bestimmt man also den Exponenten (=x) einer festgelegten Basis (=3), um einen Potenzwert (= 81) zu erhalten.

- **<u>Schreib- und Sprechweise</u>:**
  - **Schreibe: $\log_3 81 = x$**
  - **Sprich: Logarithmus von 81 zur Basis 3 ist x**
- **Den Logarithmus <u>mit dem Taschenrechner</u> bestimmen:**
  - $\log_3 81$
  - $X = \frac{log\ 81}{log\ 3}$, **X = 4, da** $3^4 = 81$
  - **Taschenrechner: 81 log : 3 log = 4**

4. Berechne folgende Aufgaben

Berechne den Potenzwert

a) $3^4 =$ ____ **b)** $12^3 =$ ____ **c)** $625^{\frac{1}{2}} =$ ____

d) $5^{-2} =$ ____ **e)** $2^{10} =$ ____ **f)** $5^{-3} =$ _____

Berechne die Basis

Beispiel $x^2 = 81$ -> $\sqrt{81} = 9$ -> $x = 9$

$x^3 = 1331$ -> $\sqrt[3]{1331} = 11$ -> $x = 11$

a) $x^4 = 256$ -> ________________________________

b) $x^3 = 1728$ -> ________________________________

c) $x^2 = 361$ -> ________________________________

d) $x^6 = 15625$ -> ______________________________

Bestimme den Exponenten

Beispiel $3^x = 81$,

x =4, da 3*3*3*3 = 81 -> $3^4 = 81$

a) $2^x = 8$ -> x = ________________

b) $4^x = 16$ -> x = ________________

c) $5^x = 125$-> x = ________________

d) $9^x = 6561$-> x = ________________

e) $3^x = 2187$-> x = ________________

f) $2^x = 524\,288$-> x = ________________

5. Kapitalwachstum – Exponentielles Wachstum

Marco, 18 Jahre alt, legt bei einer Bank 2000€ zu einem Zinssatz von 4% für 3 Jahre bei seiner Bank an. Die Zinsen bleiben jedes Jahr auf dem Konto und werden mitverzinst.

Anfangskaptal	$\cdot 1{,}04$	Kapital nach 1 Jahr	$\cdot 1{,}04$	Kapital nach 2 Jahren	$\cdot 1{,}04$	Kapital nach 3 Jahren
2000€	$\cdot \frac{104}{100}$	2080€	$\cdot \frac{104}{100}$	2163,2€	$\cdot \frac{104}{100}$	2249,73€

$$2000€ \; (\cdot 1{,}04)^{3} = 2249{,}73€$$

Wachstumsformel

Mathematisches Modell

Anfangswert (W_0) = 2000€ = 100% = $\frac{100}{100}$ = 1

Wachstumsrate: 4% = $\frac{4}{100}$ = 0,04

Wachstumsfaktor q = 1,04 (q= 1+0.04) // bei Abnahme von 4% q = 1 – 0,04

Anzahl der Zeiteinheiten n = 3

Endwert nach n – Zeiteinheiten (W_n)

$$W_0 \cdot q^n = W_n$$ **Wachstumsformel**

$$2000€ \cdot 1.04^3 = W_n$$

$$2249{,}73€ = W_n$$

Grundaufgaben mit der Wachstumsformel

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th colspan="2">Lösung</th></tr>
<tr><td>Ein Kapital von 5000 € wird zu 6% zehn Jahre lang angelegt. Auf welchen Betrag steigt das Kapital an, wenn die Zinsen mitverzinst werden?</td><td>$W_0 \cdot q^n = W_n$
q= 1+0.06 → q= 1,06
$5000 \cdot 1,06^{10} = W_n$
8954,23 = W_n</td><td>W_n=?</td></tr>
<tr><td>Ein fest angelegtes Kapital wächst in 8 Jahren bei einem Zinssatz von 3% auf den Betrag von 733€, wenn die Zinsen nicht abgehoben werden. Berechne das Startkapital.</td><td>$W_0 \cdot q^n = W_n$
q= 1+0.03 → q= 1,03
$W_0 \cdot 1,03^8 = 733$
W_0 = 733 : $1,03^8$
W_0 = 578,64€</td><td>W_0 =?</td></tr>
<tr><td>In den letzten 10 Jahren wuchs die Anzahl der Autobesitzer eines Dorfes exponentiell von 50 auf 75. Berechnet den Wachstumsfaktor und das jährliche Wachstum (in Prozent)!</td><td>$W_0 \cdot q^n = W_n$
$50 \cdot q^{10} = 75$
$q^{10} = 1,5$ // $\sqrt[10]{1,5}$
q = 1,17
q= 1+ $\frac{p}{100}$ → 1,17 - 1 = $\frac{p}{100}$
p= 17 %</td><td>q =?
p = ?</td></tr>
<tr><td>Frau Hien legt 1800€ bei einer Bank zu einem festgelegten Zinssatz von 4% an. Nach Ende der Laufzeit erhält sie 2189,98 €. Wie viele Jahre hat sie das Geld angelegt?</td><td>$W_0 \cdot q^n = W_n$
1800€ · $1,04^n = 2189,98$
$1,04^n$ = 1,22
n = $\frac{\log 1,22}{\log 1,04}$ n = 5,07</td><td>n = ?</td></tr>
</table>

6. Übungsaufgaben

a) Berechne die fehlenden Angaben!

Anfangswert W_0	Endwert W_n	Zeit/ Intervall n	Prozente %
580		18 Monate	+6%
7789,78	9999	5 Jahre	
	120455	9 Tage	+10%
67,66	5,40	12 Jahre	
23.300	50500		+7,3%
999	7		-23%
8,5		2 Durchgänge	-50%

b) Die Population einer vom Aussterben bedrohten **Spezies** (deren Fortpflanzung nicht vom Rhythmus der Jahreszeiten abhängt) besitzt noch 600 Individuen und sinkt (exponentiell) jedes Jahr **um** ein Drittel. Wie groß wird sie in zweieinhalb Jahren sein?

c) 3. Ein Autohaus hat einen Gewinn von 20000 Euro • 10^4 erwirtschaftet. Dieser Gewinn steigert sich in den nächsten 3 Jahren um 2,5%. Wie viel Geld hat das Autohaus?

d) Lisa erwirbt sich einen Motorroller für 2800 Euro. Ermittle rechnerisch nach wie vielen Jahren der Motoroller nur noch 210 Euro wert ist, wenn er einen jährlichen Verlust von 21% aufweist.

➔ Der Verlust beträgt tatsächlich im ersten Jahr 23% und in den darauf folgenden Jahren 16% des jeweiligen Vorjahres. Wie viel ist er nach vier Jahren noch wert?

e) 5. Alle 12 Jahre zerfällt ein radioaktiver Stoff zu einem Viertel. Zu Beginn Betrug sein Wert 875. Wie viel ist von ihm nach 84 Jahren noch übrig?

Lösung

Anfangswert W_0	Endwert W_n	Zeit/ Intervall n	Prozente %
580	~1655,52	18 Monate	+6%
7789,78	9999	5 Jahre	~5,1%
~51040,25	120455	9 Tage	+10%
67,66	5,40	12 Jahre	~-19%
23.300	50500	~11	+7,3%
999	7	19	-23%
8,5	2.125	2	-50%

246 Exemplare -- 215.378.125 -- 11 Jahre -- 1277,87 Euro -- = 0,05

7. Prüfungsaufgaben

Alexandras Oma legt bei der Geburt ihrer Enkelin am 1. Januar bei einer Online-Bank einen Betrag von 850 Euro zu einem jährlichen Zinssatz von 3,57 % an. Die Zinsen werden jedes Jahr dem Kapital gutgeschrieben und mitverzinst.

a) Ermitteln Sie rechnerisch den Betrag, auf den das angelegte Kapital bis zu Alexandras 17. Geburtstag angewachsen ist.

b) Alexandras Führerschein kostet 2 035 Euro. Berechnen Sie, wie viele Jahre das Kapital von 850 Euro zu diesem Zinssatz mindestens angelegt sein müsste, um damit den Führerschein bezahlen zu können.

c) Berechnen Sie, bei welchem Zinssatz der Betrag bereits nach 16 Jahren auf 2 035 Euro angewachsen wäre.

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-wachstum-und-zinseszins-2014-ag-ii-nr-7-av:5ea6c0dcb4b8760013968cab

6. Das radioaktive Element Strontium-90 hat eine Halbwertszeit von 20 Jahren.

   a) Wie viele Milligramm Strontium-90 sind bei einer Ausgangsmenge von 500 mg nach 80 Jahren noch vorhanden? Berechnen Sie.

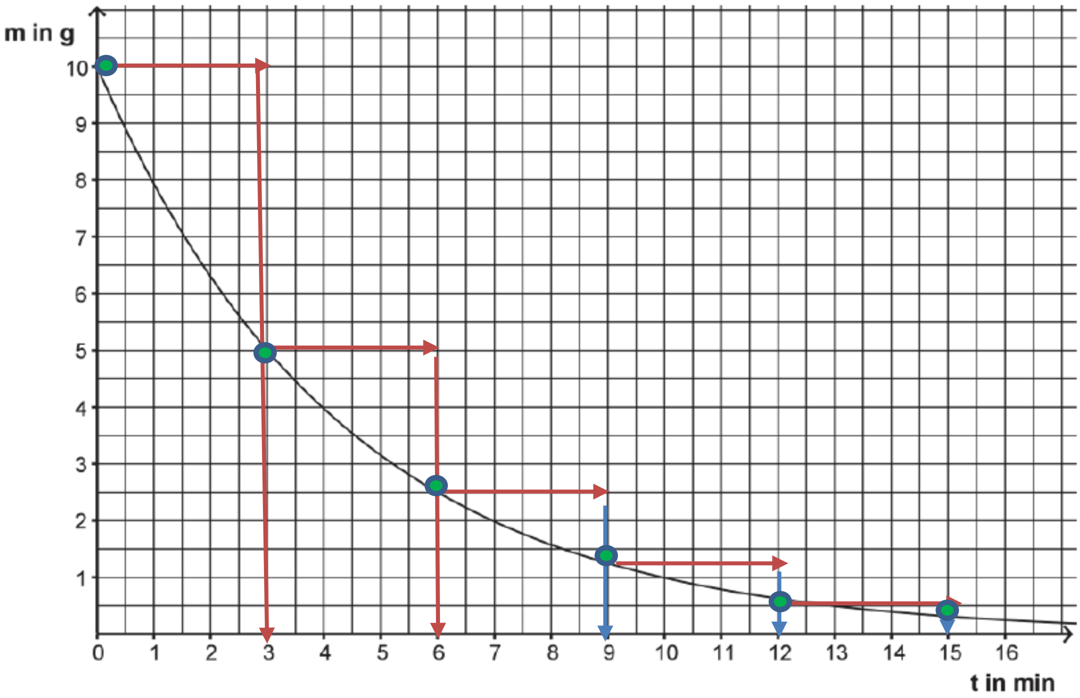
   b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren von 500 mg Strontium-90 nur noch 1 mg vorhanden ist.

   c) Berechnen Sie den durchschnittlichen jährlichen Zerfall von Strontium-90 in Prozent.

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-radioaktiven-zerfall-berechnen-2015-ag-ii-nr-6-av:5e956a35ca49c6001314eb82

8. Radioaktiver Zerfall – Halbwertszeit - Erklärung

Der Zerfall von 10 g radioaktivem Polonium – 218 wird durch folgenden Graphen dargestellt.



Auswertung:

- ➔ **Alle 3 Minuten zerfällt Polonium – 218 um die Hälfte**
- ➔ **Die Halbwertszeit (Wert · 0,5) beträgt also 3 Minuten**

Aufgabe

Das radioaktive Polonium – 218 hat eine Halbwertszeit von 3 Minuten.
Wie viel Gramm Polonium - 218 sind bei einer Ausgangsmenge von 10g nach 12 Minuten noch vorhanden?

Zeichnerische Lösung

Startpunkt	·0,5	·0,5	·0,5	·0,5 **Endwert**
10g	5g	2,5g	1,25g	0,625

12 Minuten

Rechnung

Du kannst die normale Formel anwenden. Oft wird statt W auch Z für Zerfall verwendet! Auch N wird verwendet

$W_0 \cdot q^n = W_n$ $Z_0 \cdot q^n = Z_n$ $N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}} = N_t$

W_0 = 10g

q = 0,5 (Halbwertszeit! -> Zerfall um 50 Prozent)

n -> in zwölf Minuten wird Polonium – 218 viermal halbiert!

n = 12 : 3 → n = 4

W_n = ?

$10g \cdot 0{,}5^4 = W_n$

0,625 = W_n

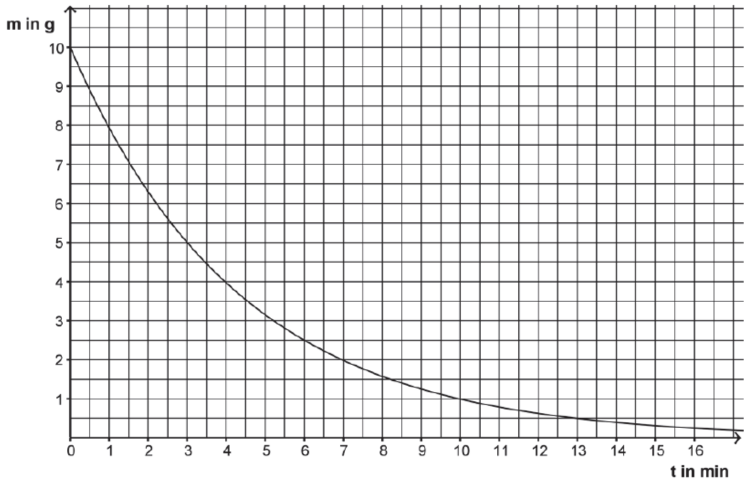
9. Prüfungsaufgabe als Beispiel

Die Halbwertszeit des radioaktiven Elements Radium beträgt 1602 Jahre.

a) Berechnen Sie die Masse an Radium, die nach 400 Jahren von ursprünglich 5000 Gramm noch vorhanden ist.

b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren von ursprünglich 80 Gramm Radium noch 56,57 Gramm vorhanden sind.

Der Zerfall von 10 g radioaktivem Polonium-218 wird durch den folgenden Graphen dargestellt.



c) Bestimmen Sie die Halbwertszeit des Elements anhand des Graphen.

d) Geben Sie an, nach wie vielen Minuten von 10 g Polonium-218 nur noch 0,5 g vorhanden sind.

a) $N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}} = N_t$

$5000g \cdot 0{,}5^{\frac{1602}{400}} = Z_n$

$311{,}42g = Z_n$

b) $Z_0 \cdot q^n = Z_n$

$80 \cdot 0,5^n = 56,57$ / : 80

$0,5^n$ = 0,707125

n = log 0,707125 : log 0,5

n ≈0,5 → 400 Jahre · 0,5 = <u>200 Jahre</u>

a) Siehe oben → 3 Minuten

b) $10g \cdot 0,5^n = 0,5g$ / : 10

$0,5^n$ = 0,05

$n =$ log 0,05 : log 0,5

$n \approx$ 4,32 → 4,32 ·3 Minuten ≈ <u>13 Minuten</u>

Anmerkung: Diese Aufgabe könnte mann auch aus der Zeichnung ablesen!

10. Prüfungsaufgaben und Erklärvideo

6. Das radioaktive Element Strontium-90 hat eine Halbwertszeit von 20 Jahren.
   a) Wie viele Milligramm Strontium-90 sind bei einer Ausgangsmenge von 500 mg nach 80 Jahren noch vorhanden? Berechnen Sie.
   b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren von 500 mg Strontium-90 nur noch 1 mg vorhanden ist.
   c) Berechnen Sie den durchschnittlichen jährlichen Zerfall von Strontium-90 in Prozent.

https://www.br.de/mediathek/video/mathe-pruefung-msa-bayern-radioaktiven-zerfall-berechnen-2015-ag-ii-nr-6-av:5e956a35ca49c6001314eb82